c) $(C') = S_{\Delta}(C)$ où S_{Δ} est la symétrie orthogonale d'axe $\Delta : y = x$.

3°/a) La fonction f est continue sur $\mathbf{R}$ donc la fonction

$F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est dérivable sur $\mathbf{R}$.

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}[$, $\operatorname{tg} x \in [0,1] \subset \mathbf{R}$

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}[$, $\varphi(x) = F(\operatorname{tg} x)$

φ est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{4}[$ comme composée de deux fonctions dérivables.

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}[\ , \varphi'(x) = (1+\operatorname{tg}^2 x) F'(\operatorname{tg} x) = (1+\operatorname{tg}^2 x) f(\operatorname{tg} x)$$

$$= (1+\operatorname{tg}^2 x) \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 x + 2}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 2$$

b) On a : $\varphi'(x) = \operatorname{tg}^2 x + 2 = (1+\operatorname{tg}^2 x) + 1 = \operatorname{tg}^2 x + 1$

$\Rightarrow \varphi(x) = \operatorname{tg} x + x + C$

or $\varphi(0) = 0$ d'où $C = 0$ et par suite $\varphi(x) = x + \operatorname{tg} x$.

c) $A = \int_0^1 (f(t) - 1)\,dt$ (uA) car C_f est au dessus de la droite $D : y = 1$.

$$\int_0^1 (f(t)-1)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt - \int_0^1 dt = \int_0^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} f(t)\,dt - [t]_0^1 = \varphi(\frac{\pi}{4}) - 1$$

or $\varphi(x) = x + \operatorname{tg} x$ d'où $\varphi(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} + 1$

d'où $A = \frac{\pi}{4}$ (uA).

Solution 9 :

1°/a) $0 \le x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le x^2 \le 1 \Leftrightarrow -1 \le -x^2 \le 0 \Leftrightarrow 0 \le 1-x^2 \le 1 \Leftrightarrow$

$0 \le \sqrt{1-x^2} \le 1 \Leftrightarrow 0 \le x^n \sqrt{1-x^2} \le x^n$

d'où $0 \le \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}\,dx \le \int_0^1 x^n dx \Leftrightarrow 0 \le U_n \le [\frac{x^{n+1}}{n+1}]_0^1$ donc

$0 \le U_n \le \frac{1}{n+1}$